

## الموضوع الأول

### التمرين الأول :

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقطة  $A(-1; 1; 3)$  والمستوي  $(p)$  ذا المعادلة:  $2y + z + 1 = 0$  ،  $D(2; 0; -1)$  ،  $C(2; -1; 1)$  ،  $B(1; 0; -1)$

ليكن  $(\Delta)$  المستقيم الذي تمثيل وسيطي له: 
$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 + \beta \\ z = 1 - 2\beta \end{cases}$$
 حيث  $\beta$  وسيط حقيقي .

1) اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(BC)$  ، ثم تحقق أن المستقيم  $(BC)$  محتوي في المستوي  $(p)$  .

2) بين أن المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(BC)$  ليسا من نفس المستوي .

3) أ - احسب المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $(p)$  .

ب - بين أن  $D$  نقطة من  $(p)$  وأن المثلث  $BCD$  قائم .

ج - بين أن  $ABCD$  رباعي وجوه ، ثم احسب حجمه .

### التمرين الثاني :

I) المتتالية  $(v_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n}$

1) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول.

2) احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

II) المتتالية  $(u_n)$  معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ:  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 6$  .

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

3) أ برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$  .

ب) برهن أنه ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$  ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

## التمرين الثالث :

1. حل في  $\mathbb{C}$  مجموعة الأعداد المركبة المعادلة (I) ذات المجهول  $z$  التالية :

$$(I) z^2 - (4 \cos \alpha) z + 4 = 0 \dots\dots\dots (I) \text{ حيث } \alpha \text{ وسيط حقيقي.}$$

2. من أجل  $\alpha = \frac{\pi}{3}$  ، نرسم إلى حلي المعادلة (I) بـ  $z_1$  و  $z_2$  . بين أن :  $\left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{2013} = 1$  .

3. نعتبر في المستوي المركب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  التي لاحقاتها  $z_A = 1 + i\sqrt{3}$  و  $z_B = 1 - i\sqrt{3}$  و  $z_C = 4 + i\sqrt{3}$  على الترتيب .  
أ) أنشئ النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  .

ب) اكتب على الشكل الجبري العدد المركب  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$  ثم استنتج أن  $C$  هي صورة  $B$

بالتشابه المباشر  $S$  الذي مركزه  $A$  ويطلب تعيين نسبته وزاويته .

ج) عين لاحقة النقطة  $G$  مرجح الجملة  $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$  ، ثم أنشئ  $G$  .

د) احسب  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  ، بحيث يكون الرباعي  $ABDG$  متوازي أضلاع .

## التمرين الرابع :

$x$	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

(I)  $f$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ :  $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$

و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

1. احسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  ، ثم استنتج المستقيمين

المقاربين للمنحنى (C) .

2. احسب  $f'(x)$  . بين أن الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 1[$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3. بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في  $]-\infty; 1[$  حلا وحيدا  $\alpha$  . باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصر العدد  $\alpha$  .

4. ارسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم ارسم المنحنى  $(C')$  الممثل للدالة  $|f|$  .

5. عين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية  $m$  التي من أجلها يكون للمعادلة  $|f(x)| = m$  حلان مختلفان في الإشارة .

(II)  $g$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; 1[$  بـ :  $g(x) = f(2x-1)$  . (عبارة  $g(x)$  غير مطلوبة)

1. ادرس تغيرات الدالة  $g$  على  $]-\infty; 1[$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2. ا. تحقق من أن:  $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$  ، ثم بين أن:  $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$

ب. استنتج معادلة  $(T)$  المماس لمنحنى الدالة  $g$  في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha+1}{2}$ .

ج. تحقق من أن:  $y = \frac{2}{(\alpha-1)^3}x - \frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$  معادلة للمستقيم  $(T)$ .





## الموضوع الثاني

### التمرين الأول :

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\mathbb{C}$  ، المعادلة  $(E)$  ذات المجهول  $z$  الآتية:

$$z^2 + 4z + 13 = 0 \dots\dots (E)$$

1. تحقق أن العدد  $-2 - 3i$  هو حل للمعادلة  $(E)$  ، ثم جد الحل الآخر.
2.  $A$  و  $B$  نقطتان من المستوي المركب لاحقتاهما على الترتيب :  $z_A = -2 - 3i$  ،  $z_B = i$  .  
 $S$  التشابه المباشر الذي مركزه  $A$  ، نسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  والذي يحول كل نقطة  $M(z)$  من المستوي إلى النقطة  $M'(z')$ .

أ- بين أن :  $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$  .

ب- احسب  $z_C$  لاحقة النقطة  $C$  ، علما أن  $C$  هي صورة  $B$  بالتشابه  $S$  .

3. لتكن النقطة  $D$  ، حيث :  $2\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$

- أ- بين أن  $D$  هي مرجح النقطتين  $A$  و  $B$  المرفقتين بمعاملين حقيقيين يطلب تعيينهما .  
 ب- احسب  $z_D$  لاحقة النقطة  $D$  .

ج- بين أن :  $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$  ثم استنتج طبيعة المثلث  $ACD$  .

### التمرين الثاني :

في الشكل المقابل ،  $(C_f)$  هو التمثيل البياني

للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; 1]$  بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \text{ ، و } (d) \text{ المستقيم ذو المعادلة } y = x .$$

1.  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول :  $u_0 = \frac{1}{2}$

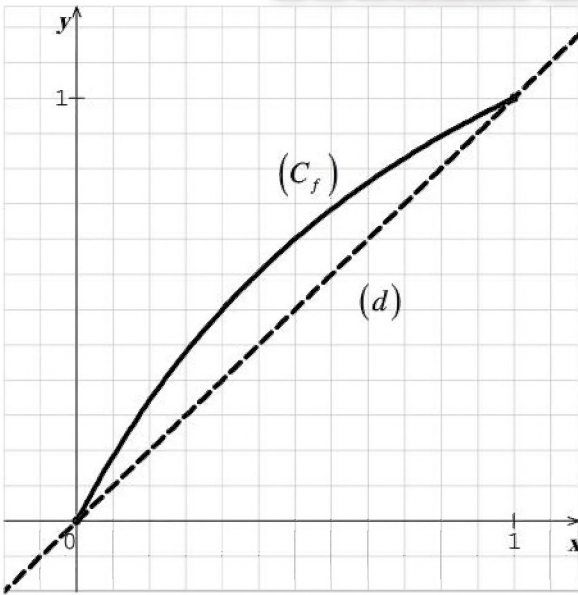
ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$  .

أ) اعد رسم هذا الشكل على ورقة الإجابة ، ثم مثل

الحدود  $u_0$  ،  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  على محور الفواصل دون حسابها ، مبرزاً خطوط التمثيل.

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها.

2. أ) أثبت أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; 1]$  .



- ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 < u_n < 1$  .  
 ج) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

3.  $(v_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$  .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  ، يطلب حساب حدها الأول  $v_0$  .

ب- احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

### التمرين الثالث :

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  نعتبر النقط :

$$A(2; 1; -1), B(1; -1; 3), C\left(-\frac{3}{2}; -2; 1\right), D\left(\frac{7}{2}; -3; 0\right)$$

ولتكن  $I$  منتصف  $[AB]$

1. أ) احسب احداثيات النقطة  $I$  .

ب) بين أن :  $2x + 4y - 8z + 5 = 0$  معادلة ديكارتية لـ  $(P)$  ، المستوي المحوري لـ  $[AB]$  .

2. اكتب تمثيلا وسيطيا للمستقيم  $(\Delta)$  الذي يشمل النقطة  $C$  و  $\vec{u}(1; 2; -4)$  شعاع توجيه له.

3. أ) جد احداثيات  $E$  نقطة تقاطع المستوي  $(P)$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

ب) بين أن  $(\Delta)$  و  $(AB)$  من نفس المستوي ، ثم استنتج أن المثلث  $IEC$  قائم.

4. أ) بين أن المستقيم  $(ID)$  عمودي على كل من المستقيم  $(AB)$  والمستقيم  $(IE)$  .

ب) احسب حجم رباعي الوجوه  $DIEC$  .

### التمرين الرابع :

I  $g$  الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  ب :  $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2 \ln(x+1)$  .

1. ادرس تغيرات الدالة  $g$  ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2. استنتج أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $g(x) > 0$  .

II  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  ب :  $f(x) = x - \frac{1 - 2 \ln(x+1)}{x+1}$

$(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  .

(وحدة الطول  $2cm$ )

1. أ) احسب  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$  . فسر النتيجة بيانيا



ب) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  فإن:  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ .

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $]-1; +\infty[$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

ج) بين أن المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن  $0 < \alpha < 0,5$ .

3. أ) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذا المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ .

ب) ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$ .

4. نقبل أن المستقيم  $(T)$  ذا المعادلة:  $y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$  مماس للمنحنى  $(C_f)$  في نقطة

فاصلتها  $x_0$ .

أ) احسب  $x_0$ .

ب) ارسم المستقيمين المقاربين والمماس  $(T)$  ثم المنحنى  $(C_f)$ .

ج) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي  $m$  بحيث المعادلة  $f(x) = x + m$  تقبل حلين متميزين.

الدراسة الجزائرية  
www.eddirasa.com



## حل الموضوع الأول

التمرين الأول :

1)  $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$  شعاع توجيه للمستقيم  $(BC)$  و  $B \in (BC)$  ومنه:

$$(BC): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

- التحقق أن المستقيم  $(BC)$  محتوئ في المستوي  $(p)$ :

$$(BC) \cap (P): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+2t \\ 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{دراسة التقاطع بين } (p) \text{ و } (BC):$$

او يمكن التحقق بتعويض احداثيات  $B$ ،  $C$  في معادلة  $(P)$ .

2)  $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$  و  $\vec{u}(0;1;-2)$  شعاع توجيه  $(\Delta)$  غير مرتبطين خطيا لأن  $\frac{0}{1} \neq \frac{1}{-1}$

ومنه  $(BC)$  و  $(\Delta)$  إما متقاطعان وفق نقطة أو ليسا من نفس المستوي.

$$\begin{cases} t = -2 \\ \beta = 0 \end{cases} \quad \text{دراسة التقاطع بين } (BC) \text{ و } (\Delta): \begin{cases} -1 = 1+t \\ 2 + \beta = -t \\ 1 - 2\beta = -1 + 2t \end{cases} \quad \text{نجد: } (BC) \cap (\Delta):$$

بالتعويض:  $t = -2$  نجد  $H_t(-1;2;-5)$ ، ومن أجل  $\beta = 0$  نجد  $H_\beta(-1;2;1)$

بما أن  $H_t \neq H_\beta$  فإن  $(BC) \cap (\Delta) = \emptyset$  ومنه  $(BC)$  و  $(\Delta)$  ليسا من نفس المستوي.

3) أ- حساب المسافة بين النقطة  $A$  والمستوي  $(p)$ :

$$d(A; (P)) = \frac{|2(1) + 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

ب- بتعويض احداثيات  $D$  في معادلة  $(p)$  نجد:  $2(0) + (-1) + 1 = -1 + 1 = 0$  ومنه:

$D$  نقطة من  $(p)$ .

اثبات أن المثلث  $BCD$  قائم:

لدينا:  $\overrightarrow{BC}(1;-1;2)$  ،  $\overrightarrow{BD}(1;0;0)$  ،  $\overrightarrow{DC}(0;-1;2)$  ومنه:  
 $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{DC}$  ومنه  $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{DC} = (1) \times (0) + (0) \times (-1) + (0) \times (2) = 0$   
 إذن المثلث  $BCD$  قائم في  $D$  . ويمكن استعمال مبرهنة فيثاغورث.  
 ج- اثبات أن  $ABCD$  رباعي وجوه :

لدينا:  $\begin{cases} (BC) \subset (P) \\ D \in (P) \end{cases}$  ومنه  $B, C, D$  من نفس المستوي  $(P)$  وليست في استقامية لأنها

تشكل مثلثا، ومن جهة  $d(A; (P)) = \frac{6\sqrt{5}}{5} \neq 0$  أي  $A \notin (P)$  .

إذن  $ABCD$  رباعي وجوه .

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times S_{BCD} \times h = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times BD \times DC \right) \times d(A; (P))$$

$$= \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{5} \right) \times \frac{6}{\sqrt{5}} = 1$$

إذن:  $V_{ABCD} = 1$  uv

التمرين الثاني :

$$v_n = \frac{5^{n+1}}{6^n} \quad (I)$$

$(v_n)$  متتالية هندسية:

$$v_{n+1} = \frac{5^{n+2}}{6^{n+1}} = \frac{5}{6} \times \left( \frac{5^{n+1}}{6^n} \right) = \frac{5}{6} v_n$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{5}{6}$  وحدها

$$v_0 = 5, v_0 = \frac{5^{0+1}}{6^0} = 5 \text{ الأول}$$

$$0 < q < 1 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad (2)$$

$$u_0 = 1 \quad (II)$$

$$u_{n+1} = \sqrt{5u_n + 6}$$

1) اثبات بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 6$  .

نضع:  $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 6$  .

\* المرحلة 1: من أجل  $n = 0$  لدينا  $P(0)$  :  $1 \leq u_0 \leq 6$  ، أي:  $1 \leq 1 \leq 6$  محققة.

\* المرحلة 2: نفرض صحة  $p(n)$  أي :  $1 \leq u_n \leq 6$  ونبرهن صحة  $p(n+1)$  أي :



$$1 \leq u_{n+1} \leq 6$$

لدينا :  $1 \leq u_n \leq 6$  ومنه  $5 \leq 5u_n \leq 30$  ومنه  $11 \leq 5u_n + 6 \leq 36$  ومنه :

$$11 \leq 5u_n + 6 \leq 36 \text{ أي: } 1 \leq \sqrt{11} \leq \sqrt{5u_n + 6} \leq \sqrt{36} \text{ أي: } 1 \leq u_{n+1} \leq 6$$

\* الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 6$  .

2) اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{5u_n + 6} - u_n = \left[ \sqrt{5u_n + 6} - u_n \right] \times \frac{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

$$= \frac{-u_n^2 + 5u_n + 6}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n} = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 6)}{\sqrt{5u_n + 6} + u_n}$$

إشارة  $u_{n+1} - u_n$  من إشارة  $-(u_n + 1)(u_n - 6)$  ، ولكون  $1 \leq u_n \leq 6$  نستنتج أن:

$$-(u_n + 1)(u_n - 6) \geq 0 \text{ ومنه } (u_n) \text{ متزايدة تماما على المجال } [1; 6] .$$

3) أثبات أن، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$  .

$$\text{لدينا } 6 - u_{n+1} \leq 6 - \sqrt{5u_n + 6} \text{ ، ومنه: } 6 - u_{n+1} \leq \left(6 - \sqrt{5u_n + 6}\right) \times \frac{6 + \sqrt{5u_n + 6}}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

$$\text{أي: } 6 - u_{n+1} \leq \frac{30 - 5u_n}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \text{ ، أي: } 6 - u_{n+1} \leq \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}}$$

$$\text{ومن جهة لدينا: } \frac{1}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{1}{6} \text{ ومنه: } \frac{5(6 - u_n)}{6 + \sqrt{5u_n + 6}} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

$$\text{ومنه: } 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n)$$

ب) أثبات أنه، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq 6 - u_n \leq v_n$  :

$$\text{لدينا: } 6 - u_{n+1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_n) \text{ ، أي:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \cancel{6 - u_1} \leq \frac{5}{6}(6 - u_0) \\ 0 \leq \cancel{6 - u_2} \leq \frac{5}{6}(\cancel{6 - u_1}) \\ 0 \leq 6 - u_3 \leq \frac{5}{6}(\cancel{6 - u_2}) \\ \dots\dots\dots \\ \cancel{6 - u_{n-1}} \leq \frac{5}{6}(6 - u_{n-2}) \\ 0 \leq 6 - u_n \leq \frac{5}{6}(\cancel{6 - u_{n-1}}) \end{array} \right.$$

بضرب أطراف المتباينات وبعد الاختزال نجد:  $0 \leq 6 - u_{n+1} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n (6 - u_0)$ ، أي

$$0 \leq 6 - u_{n+1} \leq v_n \text{ وبالتالي } 0 \leq 6 - u_{n+1} \leq \frac{5^{n+1}}{6^n} \text{، أي } 0 \leq 6 - u_{n+1} \leq \left(\frac{5}{6}\right)^n \times 5$$

استنتاج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ :

لدينا:  $0 \leq 6 - u_{n+1} \leq v_n$ ، وبما أن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$  فإن:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (6 - u_{n+1}) = 0$

ومنه:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = 0$ ، أي:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

التمرين الثالث:

$$1. \Delta = (-4 \cos \alpha)^2 - 4(1)(4) = 16(\cos^2 \alpha - 1) = -16 \sin^2 \alpha < 0$$

$$\text{لدينا: } \Delta = (i \sin \alpha)^2 \text{، ومنه: } z_0 = \frac{4 \cos \alpha + 4i \sin \alpha}{2} = 2 \cos \alpha + 2i \sin \alpha$$

$$\text{و } z_1 = \overline{z_0} = 2 \cos \alpha - 2i \sin \alpha$$

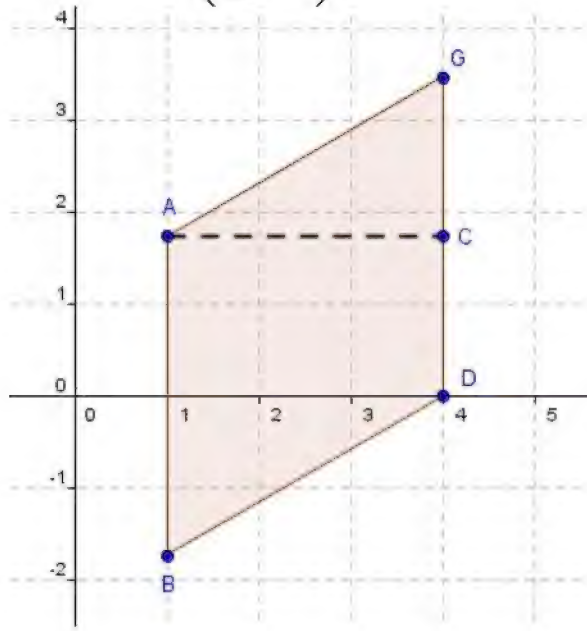
2. من أجل  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ، نجد:

$$z_1 = 2 \cos \frac{\pi}{3} + 2i \sin \frac{\pi}{3} = 1 + i\sqrt{3} \text{ و } z_2 = 2 \cos \frac{\pi}{3} - 2i \sin \frac{\pi}{3} = 1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{اثبات أن: } \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^{2013} = 1$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2013} = \left(\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}}\right)^{2013} = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{2013} = e^{i(1342\pi)} = e^{i(2\pi)} = 1 \text{ لدينا:}$$

3. أ) انشاء النقط  $A$  ،  $B$  و  $C$  :



$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{(4 + i\sqrt{3}) - (1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3}) - (1 + i\sqrt{3})} = \frac{3}{-2i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ لدينا:}$$

بما أن:  $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$  فإن  $z_C - z_A = \frac{\sqrt{3}}{2}i(z_B - z_A)$  وهي من كتابة مختصرة

لتشابه مباشر مركزه  $A$  ونسبته  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$ .

ج)  $G$  مرجح الجملة  $\{(A; 1), (B; -1), (C; 2)\}$  ، ومنه

$$z_G = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = 4 + 2i\sqrt{3}$$

د)  $ABDG$  متوازي أضلاع معناه:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GD}$  ، ومنه  $z_B - z_A = z_D - z_G$

ومنه:  $z_D = z_B - z_A + z_G$  ، بالحساب نجد  $z_D = 4$ .

التمرين الرابع :

$$f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \text{ ب: } ]-\infty; 1[ \text{ الدالة المعرفة على } (I)$$

1. لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}} \right] = 2$$



المستقيمين المقاربين للمنحنى (C) معادلتيهما  $x = 1$  و  $y = 2$ .

2. الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]-\infty; 1[$  ولدينا :

$$f'(x) = \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} + \left( \frac{-1}{(x-1)^2} \right) e^{\frac{1}{x-1}} = \frac{-1}{(x-1)^2} \times \left( 1 + e^{\frac{1}{x-1}} \right) < 0$$

ومنه  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 1[$  ،  
جدول التغيرات:

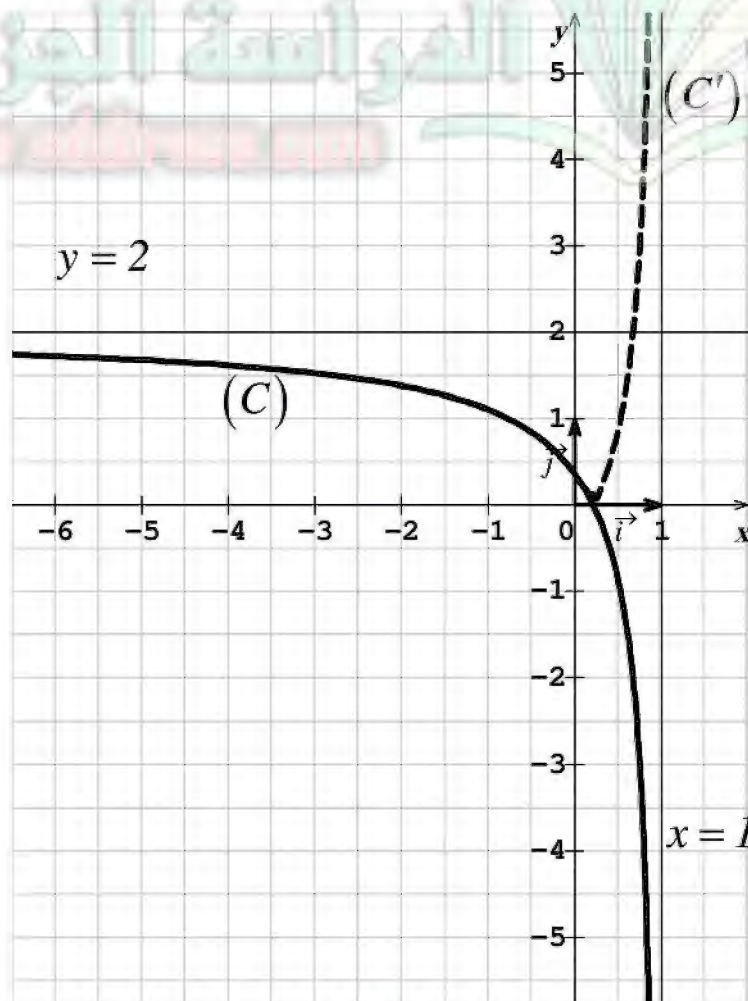
$x$	$-\infty$	$1$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	2	$-\infty$

3. الدالة  $f$  مستمرة ومتناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 1[$  ، ولدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 > 0$

و  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$  ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في  $]-\infty; 1[$

حلا وحيدا  $\alpha$ . باستعمال جدول القيم أعلاه نجد حصرا للعدد  $\alpha : 0,21 \leq \alpha \leq 0,22$ .

4. رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) ، ثم المنحنى (C') الممثل للدالة  $|f|$  :



5. بيانيا ، حلول المعادلة  $|f(x)| = m$  هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C')$  مع المستقيم الذي معادلته  $y = m$  . وحتى يكون للمعادلة حلان مختلفان في الإشارة يجب أن يكون:

$$m \in \left] \frac{1}{e}; 2 \right[$$

$g(x) = f(2x-1)$  : ب)  $]-\infty; 1[$  الدالة المعرفة على

1. دراسة تغيرات الدالة  $g$  على  $]-\infty; 1[$  ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x-1) = \lim_{X \rightarrow -\infty} f(X) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(2x-1) = \lim_{X \rightarrow 1^-} f(X) = -\infty$$

الدالة  $g$  هي مركب الدالة التآلفية:  $x \rightarrow 2x-1$  المتزايدة تماما على  $]-\infty; 1[$  متبوعة بالدالة

$f$  المتناقصة تماما على  $]-\infty; 1[$  ومنه الدالة  $g$  متناقصة تماما على  $]-\infty; 1[$  .

جدول التغيرات:

$x$	$-\infty$	$1$
$g'(x)$		-
$g(x)$	2	$-\infty$

2. ا) التحقق من أن:  $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$  ، وأن:  $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'(\alpha)$

لدينا:  $g(x) = f(2x-1)$  ، أي:  $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = f\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = f(\alpha) = 0$

ولدينا:  $g'(x) = 2f'(2x-1)$  ، ومنه:  $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = 2f'\left(2\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)-1\right) = 2f'(\alpha)$

ب) معادلة  $(T)$  المماس لمنحنى الدالة  $g$  في النقطة ذات الفاصلة  $\frac{\alpha+1}{2}$ :

لدينا:  $(T): y = g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) + g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)$

ومنه:  $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right) + 0$

أي:  $(T): y = 2f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+1}{2}\right)$

ومنه:  $(T): y = \frac{-2}{(\alpha - 1)^2} \left( 1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}} \right) x + \frac{(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)^2} \left( 1 + e^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)$

ج) التحقق من أن:  $y = \frac{2}{(\alpha - 1)^3} x - \frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1)^3}$  معادلة للمستقيم (T)

لدينا:  $f(\alpha) = 0$  معناه:  $\frac{\alpha}{\alpha - 1} + e^{\frac{1}{\alpha-1}} = 0$  أي:  $e^{\frac{1}{\alpha-1}} = -\frac{\alpha}{\alpha - 1}$

ومنه:  $(T): y = \frac{-2}{(\alpha - 1)^2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right) x + \frac{(\alpha + 1)}{(\alpha - 1)^2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha - 1} \right)$

بعد التبسيط نجد:  $y = \frac{2}{(\alpha - 1)^3} x - \frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1)^3}$





## حل الموضوع الثاني

### التمرين الأول :

1. بالتعويض في المعادلة (E) نجد :

$$(-2 - 3i)^2 + 4(-2 - 3i) + 13 = 4 + 12i - 9 - 8 - 12i + 13 = -13 + 13 = 0$$

ومنه العدد  $-2 - 3i$  هو حل للمعادلة (E)، ويكون الحل الآخر مرافقه أي:  $-2 + 3i$ .

2. أ- اثبات أن:  $z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$ .

العبارة المركبة لـ S التشابه المباشر الذي مركزه A ، نسبته  $\frac{1}{2}$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$  والذي يحول كل

نقطة  $M(z)$  من المستوي إلى النقطة  $M'(z')$  هي من الشكل:  $z' = az + b$  ، حيث:

$$b = (1 - a)z_A = \left(1 - \frac{1}{2}i\right)(-2 - 3i) = -\frac{7}{2} - 2i \text{ و } a = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}i$$

$$\text{ومنه: } z' = \frac{1}{2}iz - \frac{7}{2} - 2i$$

ب- حساب  $z_C$  لاحقة النقطة C ، علما أن C هي صورة B بالتشابه S.

$$z_C = \frac{1}{2}iz_B - \frac{7}{2} - 2i = \frac{1}{2}i(i) - \frac{7}{2} - 2i = -4 - 2i \text{ معناه: } C = S(B)$$

$$\text{أي: } z_C = -4 - 2i$$

3. أ- النقطة D تحقق  $2\overline{AD} + \overline{AB} = \vec{0}$  ، ومنه  $2\overline{AD} + (\overline{AD} + \overline{DB}) = \vec{0}$

$$\text{ومنه: } 3\overline{AD} - \overline{DB} = \vec{0}$$

أي D هي مرجح النقطتين A و B المرفقتين بالمعاملين 3 و -1 على الترتيب.

ب- لدينا:  $z_D = \frac{3 \times z_A + (-1) \times z_B}{3 + (-1)} = -3 - 5i$  ، إذن:  $z_D = -3 - 5i$ .

ج- اثبات أن:  $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$  ثم تحديد طبيعة المثلث ACD

$$\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = \frac{(-3 - 5i) - (-2 - 3i)}{(-4 - 2i) - (-2 - 3i)} = \frac{-1 - 2i}{-2 + i} = \frac{i(-2 + i)}{-2 + i} = i \text{ لدينا:}$$

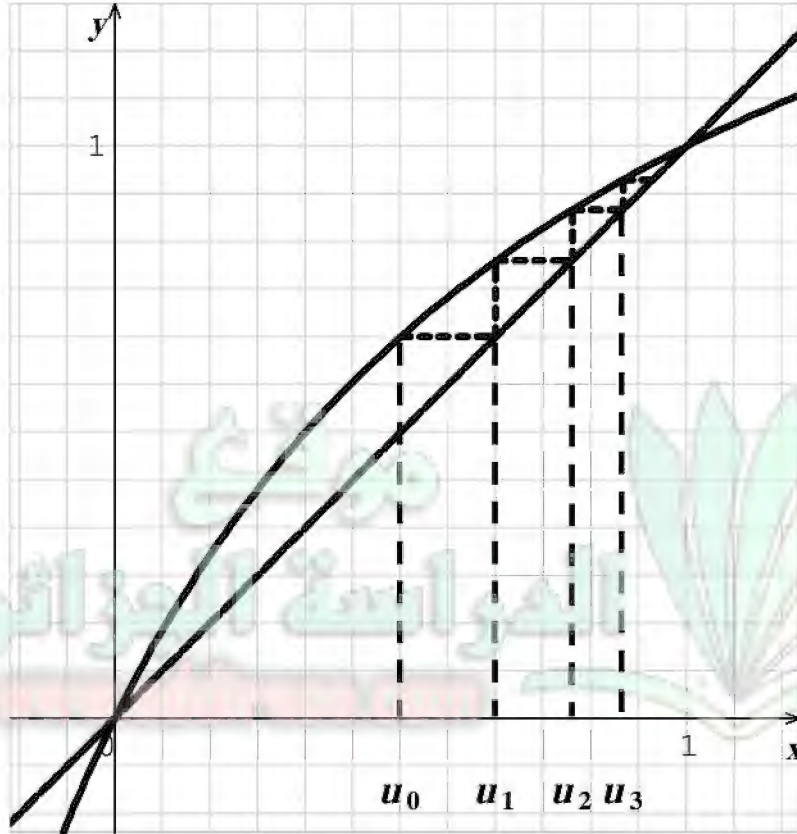
$$\begin{cases} \left| \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \right| = |i| = 1 \\ \arg \left( \frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} \right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

بمأن:  $\frac{z_D - z_A}{z_C - z_A} = i$  فإن:

أي:  $\begin{cases} AD = AC \\ (AD) \perp (AC) \end{cases}$ ، ومنه المثلث  $ACD$  قائم ومتساوي الساقين في  $A$ .

التمرين الثاني:

1. أ) الرسم:



ب) التخمين: المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما ومتقاربة نحو العدد  $1$ .

2. أ) ثبات أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; 1]$ :

الدالة  $f$  قابلة للاشتقاق على المجال  $[0; 1]$  ولدينا:

$$f'(x) = \frac{2 \times 1 - 1 \times 0}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $0 < u_n < 1$ .

نضع:  $p(n)$ ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$ :  $0 < u_n < 1$ .

\* المرحلة 1: من أجل  $n = 0$  لدينا  $P(0)$ :  $0 < u_0 < 1$ ، أي:  $0 < \frac{1}{2} < 1$  محققة.

\* المرحلة 2: نفرض صحة  $p(n)$  أي  $0 < u_n < 1$  ونبرهن صحة  $p(n+1)$  أي:

$$. 0 < u_{n+1} < 1$$

لدينا :  $0 < u_n < 1$  وبما أن الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; 1]$

$$\text{فإن } 0 < u_{n+1} < 1 \text{ ، أي : } f(0) < f(u_n) < f(1)$$

\* الخلاصة : من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 < u_n < 1$  .  
(ج) اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n(u_n - 1)}{u_n + 1}$$

$$. u_{n+1} - u_n > 0 \text{ ، ومنه } (u_n) \text{ متزايدة تماما .}$$

$$. 3 . (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة على } \mathbb{N} \text{ كما يلي : } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$$

أ- اثبات أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  ، يطلب حساب حدها الأول  $v_0$  .

$$\text{لدينا : } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\left(\frac{2u_n}{u_n + 1}\right) - 1}{\left(\frac{2u_n}{u_n + 1}\right)} = \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = \frac{1}{2} v_n$$

$$\text{ومنه : } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } \frac{1}{2} \text{ ، حدها الأول } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = -1$$

ب- حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

$$\text{لدينا : } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \text{ ومنه : } u_n v_n = u_n - 1 \text{ ، ومنه } u_n(v_n - 1) = -1 \text{ ، ومنه : } u_n = \frac{-1}{v_n - 1}$$

$$\text{ومنه : } u_n = \frac{-1}{v_0 \times q^n - 1} = u_n = \frac{-1}{-1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

$$\text{إذن : } u_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} \text{ ومنه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = 1 \text{ ، لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$



### التمرين الثالث :

1. أ)  $I$  منتصف  $[AB]$  ومنه:  $I\left(\frac{2+1}{2}; \frac{1-1}{2}; \frac{3-1}{2}\right)$  ، أي:  $I\left(\frac{3}{2}; 0; 1\right)$ .

ب) اثبات أن:  $2x + 4y - 8z + 5 = 0$  معادلة ديكارتية لـ  $(P)$ ، المستوي المحوري لـ  $[AB]$ .

-  $I$  منتصف  $[AB]$  تنتمي إلى  $(P)$  لأن:  $2\left(\frac{3}{2}\right) + 4(0) - 8(1) + 5 = -5 + 5 = 0$

- ولدينا  $\overrightarrow{AB}(-1; -2; 4)$  و  $\overrightarrow{n_{(P)}}(2; 4; -8)$  مرتبطين خطيا لأن:  $\frac{-1}{2} = \frac{-2}{4} = \frac{4}{-8}$

2. لدينا  $C \in (\Delta)$  و  $\vec{u}(1; 2; -4)$  شعاع توجيه لـ  $(\Delta)$  ومنه:

$$(\Delta): \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

3. أ) احداثيات  $E$  نقطة تقاطع المستوي  $(P)$  والمستقيم  $(\Delta)$ :

$$(\Delta) \cap (P): \begin{cases} x = -\frac{3}{2} + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 - 4t \\ 2x + 4y - 8z + 5 = 0 \end{cases}$$

ومنه:  $2\left(-\frac{3}{2} + t\right) + 4(-2 + 2t) - 8(1 - 4t) + 5 = 0$  تعني:  $t = \frac{1}{3}$ ، بالتعويض في

$$E\left(-\frac{7}{6}; -\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$$

ب) اثبات أن  $(\Delta)$  و  $(AB)$  من نفس المستوي:

لدينا  $\vec{u}(1; 2; -4)$  شعاع توجيه لـ  $(\Delta)$  و  $\overrightarrow{AB}(-1; -2; 4)$  شعاع توجيه لـ  $(AB)$  مرتبطان خطيا لأن  $\vec{u} = -\overrightarrow{AB}$  ومنه  $(\Delta)$  و  $(AB)$  متوازيان أي من نفس المستوي.

ولدينا:  $\begin{cases} (AB) \perp (P) \\ (\Delta) // (AB) \end{cases}$  إذن:  $\begin{cases} (EC) \perp (P) \\ E \in (P) \end{cases}$  ومنه المثلث  $IEC$  قائم في  $E$ .

4. أ. اثبات أن المستقيم (ID) عمودي على كل من المستقيم (AB) والمستقيم (IE) :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{AB} = (2)(-1) + (-3)(-2) + (-1)(4) = 4 - 4 = 0 \\ \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IE} = (2)\left(-\frac{8}{3}\right) + (-3)\left(-\frac{4}{3}\right) + (-1)\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0 \end{cases} \text{ لدينا:}$$

$$\cdot \begin{cases} \overrightarrow{ID} \perp \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{ID} \perp \overrightarrow{IE} \end{cases} \text{ ومنه:}$$

ب. حساب حجم رباعي الوجوه DIEC :

$$V = \frac{1}{3} \times S_{IEC} \times h = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times IE \times EC \right) \times ID = \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{\sqrt{21}}{3} \right) \times \sqrt{14} = \frac{84}{9}$$

$$\text{اذن: } V = \frac{84}{9} \text{ uv}$$

التمرين الرابع :

I.  $g(x) = x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)$  : ب.  $]-1; +\infty[$  المجال على المعرفة

1. دراسة تغيرات الدالة  $g$  ، وتشكل جدول تغيراتها :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} [x^2 + 2x + 4 - 2\ln(x+1)] = +\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \left[ \frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} - 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$$

$$\text{لأن: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+1} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$$

$$g'(x) = \frac{2x(x+2)}{x+1} \text{ : ولدينا: } \text{الدالة } g \text{ قابلة للاشتقاق على المجال } ]-1; +\infty[$$

$$\text{إشارة } g'(x) \text{ من إشارة } x \text{ لأن على المجال } ]-1; +\infty[ : x+1 > 0 \text{ و } x+2 > 0$$

$x$	$-1$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$0$
		$+$	

- الدالة  $g$  متناقصة تماما على المجال  $]-1; 0[$

- الدالة  $g$  متزايدة تماما على المجال  $[0; +\infty[$

جدول التغيرات:

$x$	$-1$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$4$	$+\infty$

2. من جدول التغيرات نستنتج أنه من أجل كل  $x$  من المجال  $]-1; +\infty[$  ،  $g(x) \geq 4 > 0$  .

II)  $f$  الدالة المعرفة على المجال  $]-1; +\infty[$  بـ :  $f(x) = x - \frac{1 - 2 \ln(x+1)}{x+1}$

1. أ)  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left( \frac{1}{x+1} \right) [x(x+1) - 1 + 2 \ln(x+1)] = -\infty$

ومنه يوجد مستقيم مقارب معادلته  $x = -1$  .

ب)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - \frac{1}{x+1} + 2 \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right] = +\infty$

2. أ) اثبات أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $]-1; +\infty[$  فإن :  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

$$f'(x) = 1 - \frac{\left( \frac{-2}{x+1} \right) (x+1) - (1 - 2 \ln(x+1))}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 2x + 4 - 2 \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ب) بما أن  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$  فإن إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  ، ومنه  $f$  متزايدة تماما

على  $]-1; +\infty[$   
جدول التغيرات:

$x$	$-1$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ج) من جدول التغيرات الدالة  $f$  مستمرة ومتزايدة تماما ولكون  $]-1; +\infty[ \subset ]0; 0,5[$

و  $f(0) = -1 < 0$  و  $f(0,5) = 0,37 > 0$  فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة



المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في المجال  $]-1; +\infty[$  ، بحيث  $0 < \alpha < 0,5$  .  
 أ.3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1 - 2 \ln(x+1)}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x+1} + \frac{2 \ln(x+1)}{x+1} \right] = 0$$

ومنه المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$  .

ب) وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة إلى  $(\Delta)$  :

$$f(x) - y = -\frac{1 - 2 \ln(x+1)}{x+1} = \frac{2 \ln(x+1) - 1}{x+1}$$

إشارة الفرق من إشارة  $2 \ln(x+1) - 1$  ، لدينا :

$$2 \ln(x+1) - 1 = 0 \text{ تعني } \ln(x+1) = \frac{1}{2} \text{ ، ومنه : } x+1 = e^{\frac{1}{2}} \text{ ، أي } x = e^{\frac{1}{2}} - 1$$

أي :  $x = \sqrt{e} - 1$  نجد هكذا :

$x$	$-1$	$\sqrt{e} - 1$	$+\infty$
$f(x) - y$	$-$	$0$	$+$

- المنحنى  $(C_f)$  تحت المستقيم  $(\Delta)$  في المجال  $]-1; \sqrt{e} - 1[$  .

- المنحنى  $(C_f)$  فوق المستقيم  $(\Delta)$  في المجال  $]\sqrt{e} - 1; +\infty[$  .

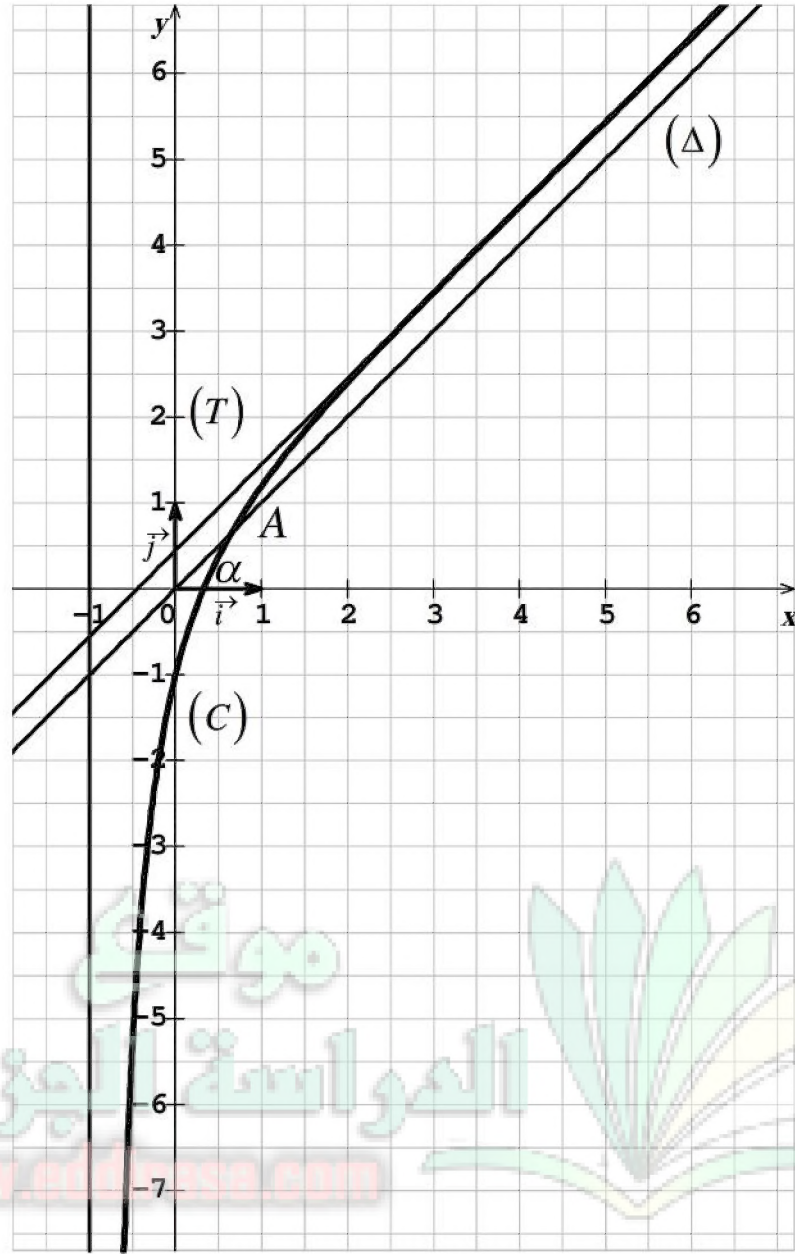
- المنحنى  $(C_f)$  يقطع المستقيم  $(\Delta)$  في النقطة ذات الإحداثيين  $A(\sqrt{e} - 1; \sqrt{e} - 1)$  .

$$4. (T) : y = x + \frac{2}{\sqrt{e^3}}$$

أ) حساب  $x_0$  : لدينا :  $f'(x_0) = 1$  أي  $\frac{g(x_0)}{(x_0 + 1)^2} = 1$  ، بعد التبسيط نجد :

$$2 \ln(x_0 + 1) = 3 \text{ ، أي } x_0 + 1 = e^{\frac{3}{2}} \text{ ، أي : } x_0 = e^{\frac{3}{2}} - 1 \text{ ، ومنه : } x_0 = \sqrt{e^3} - 1$$

ب) رسم المستقيمين المقاربين والمماس  $(T)$  ثم المنحنى  $(C_f)$  :



ج) بياناً، حلول المعادلة  $f(x) = x + m$  هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى  $(C_f)$  مع المستقيم الذي معادلته  $y = x + m$  الموازي لكل من المستقيمين  $(T)$  و  $(\Delta)$ .

إذن المعادلة تقبل حلين متمايزين عندما يكون  $0 < m < \frac{2}{\sqrt{e^3}}$  أي  $m \in \left] 0; \frac{2}{\sqrt{e^3}} \right[$ .